ベクトル公式集

■**ベクトルの掛け算**　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ は3次元のベクトルとする．

1. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}] = \det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$（スカラー三重積，グラスマン記号）
2. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
   $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$（ベクトル三重積）
3. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$（ヤコビの恒等式）
4. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\} = \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\}\cdot\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$
5. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{C} - \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\}\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{B} - \{\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{A}$

■**スカラー場・ベクトル場の微分**　ϕ, ψ はスカラー場，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はベクトル場とする．

1. $\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$
2. $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$
3. $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$
4. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$
5. $\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi\times\boldsymbol{A} + \phi\nabla\times\boldsymbol{A}$
6. $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$
7. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$
8. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$
9. $\nabla\times\nabla\phi = \boldsymbol{0}$
10. $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$
11. $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$
12. $\nabla r = \boldsymbol{r}/r,\ \nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3,\ \nabla\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$
13. $\nabla(1/r) = -\boldsymbol{r}/r^3,\ \nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^3) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

■**積分公式**　ϕ, ψ はスカラー場，$\boldsymbol{A}$ はベクトル場とする．また，$\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルを表し，線積分は $\boldsymbol{n}$ 方向に進む右ねじの回る向きで決めるものとする．

1. $\int_V \nabla\phi dV = \int_{\partial V}\phi\boldsymbol{n}dS$（勾配定理）
2. $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV = \int_{\partial V}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$（発散定理，ガウスの定理）
3. $\int_V \nabla\times\boldsymbol{A}dV = \int_{\partial V}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}dS$
4. $\int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)dV = \int_{\partial V}\phi\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}dS$（グリーンの定理）
5. $\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dV = \int_{\partial V}(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}dS$（グリーンの定理）
6. $\int_S \boldsymbol{n}\times\nabla\phi dS = \int_{\partial S}\phi d\boldsymbol{r}$
7. $\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$（回転定理，ストークスの定理）
8. $\int_S (\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{A}dS = \int_{\partial S}d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}$（テイト・マコーレイの定理）

■**球座標**　球座標 $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ における微分公式．

1. $\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$
2. $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
3. $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$